

Λύσεις Διαγωνίσματος Μαθηματικών Β Λυκείου

Θέμα 1

A1. Σχολικό βιβλίο σελ. 41

A2. Σχολικό βιβλίο σελ. 43

A3. i) Λάθος ii) Λάθος iii) Σωστό iv) Λάθος v) Λάθος

Θέμα 2

A) $\vec{\gamma} = 5\vec{\alpha} - 3\vec{\beta} = 5(1,2) - 3(2,3) = (5 - 6, 10 - 9) = (-1, 1)$ άρα

$$|\vec{\gamma}| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$B) \vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma} = 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 1 = 1$$

$$C) \vec{u} \perp \vec{\alpha} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{\alpha} = 0 \Leftrightarrow k^2 - k + 2k = 0 \Leftrightarrow k^2 + k = 0 \Rightarrow k = 0, k = -1$$

Θέμα 3

$$a) (AB) = \sqrt{8^2 + (-6)^2} = \sqrt{100} = 10$$

$$\lambda_{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-6}{8} = -\frac{3}{4}$$

$$y - 2 = -\frac{3}{4}(x - 0) \Rightarrow y = -\frac{3}{4}x + 2$$

$$AG \perp AB \Rightarrow \lambda_{AG} \cdot \lambda_{AB} = -1 \Rightarrow -\frac{3}{4} \cdot \lambda_{AG} = -1 \Rightarrow \lambda_{AG} = \frac{4}{3}$$

$$\text{Άρα } AG: y - 2 = \frac{4}{3}x \Rightarrow y = \frac{4}{3}x + 2$$

b) Το Γ είναι το σημείο τομής της ε και της ΑΓ άρα θα λύσω το σύστημά τους

$$\begin{cases} y = \frac{4}{3}x + 2 \\ y = 2x - 2 \end{cases} \Rightarrow \frac{4}{3}x + 2 = 2x - 2 \Rightarrow 4x + 6 = 6x - 6 \Rightarrow x = 6$$

$$\text{Άρα } y = 10 \Rightarrow \Gamma(6, 10)$$

$(AG) = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10 \Rightarrow (AB) = (AG)$ άρα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές

$$c) \overrightarrow{AB} = (8, -6) \quad \overrightarrow{AG} = (6, 8) \quad (AB\Gamma) = \frac{1}{2} |\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AG})| = 50$$

Μ μέσο της ΒΓ άρα οι συντεταγμένες του θα είναι

$$M\left(\frac{x_B + x_G}{2}, \frac{y_B + y_G}{2}\right) = (7, 3)$$

$$\lambda_{AM} = \frac{1}{7} \Rightarrow y - 3 = \frac{1}{7}(x - 7) \Rightarrow y = \frac{1}{7}x + 2$$

Θέμα 4

i) $A^2 + B^2 - 4\Gamma = (-4)^2 + 2^2 - 4 \cdot 3 = 8 > 0$
 Άρα παριστάνει κύκλο με κέντρο $K\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right) = (2, -1)$ και
 ακτίνα $\rho = \frac{\sqrt{A^2+B^2-4\Gamma}}{2} = \frac{\sqrt{8}}{2} = \sqrt{2}$

ii) Αν το λ ορίζεται η ευθεία θα είναι της μορφής
 $y - y_0 = \lambda(x - x_0) \Rightarrow y - 1 = \lambda(x - 2) \Rightarrow$
 $(\varepsilon): \lambda x - y + 1 - 2\lambda = 0$
 $d(K, \varepsilon) = \rho \Rightarrow \frac{|2\lambda + 1 + 1 - 2\lambda|}{\sqrt{\lambda^2 + 1}} = \sqrt{2} \Rightarrow 2 = \sqrt{2}\sqrt{\lambda^2 + 1}$
 $\Rightarrow \lambda^2 = 1 \Rightarrow \lambda = \pm 1$

Άρα οι δυο ευθείες είναι $(\varepsilon_1): y = x - 1$ και $(\varepsilon_2): y = -x + 3$

iii) Βρίσκω τα κοινά σημεία των εφαπτομένων με τον κύκλο
 λύνοντας τα αντίστοιχα συστήματα

$$\begin{cases} y = x - 1 \\ x^2 + y^2 - 4x + 2y + 3 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x^2 + (x - 1)^2 - 4x + 2(x - 1) + 3 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + x^2 - 2x + 1 - 4x + 2x - 2 + 3 = 0$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 4x + 2 = 0 \Rightarrow 2(x - 1)^2 = 0 \Rightarrow x = 1$$

$$\Rightarrow A(1, 0)$$

$$\begin{cases} y = -x + 3 \\ x^2 + y^2 - 4x + 2y + 3 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x^2 + (3 - x)^2 - 4x + 2(-x + 3) + 3 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + 9 - 6x + x^2 - 4x - 2x + 6 + 3 = 0$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 12x + 18 = 0 \Rightarrow 2(x - 3)^2 = 0 \Rightarrow$$

$$x = 3 \text{ και } y = 0 \Rightarrow B(3, 0)$$

$$\overrightarrow{MA} = (-1, -1)$$

$$\overrightarrow{MB} = (1, -1)$$

$$(MAB) = \frac{1}{2} |\det(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})| = 1$$